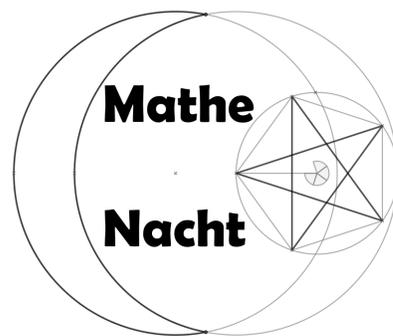
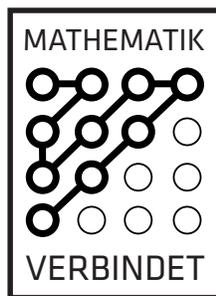


# Vektorräume, Teilräume und Lineare (Un-)abhängigkeit



## 1. Aufgabe:

Sei  $M := \{(1, 1, 4), (-2, 0, 3), (5, 1, -2)\}$ . Welche der folgenden Vektoren sind als  $\mathbb{R}$ -Linearkombinationen in  $M$  darstellbar, welche nicht? Falls ja, geht es dann auf unterschiedliche Weisen? Falls nein, was müsste konkret verändert werden?

$(2, 0, -3), (-1, 1, 7), (3, 1, -1), (-5, -3, -9)$

## 2. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind  $\mathbb{R}$ -Teilräume von  $\mathbb{R}^4$ , welche nicht? Verwende mindestens einmal das Teilraumkriterium.

- $\{(a, 0, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
- $\{(x, 0, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x + y = 0\}$
- $\{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \cdot b \cdot c \cdot d = 1\}$
- $\{(0, 1, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

## 3. Aufgabe:

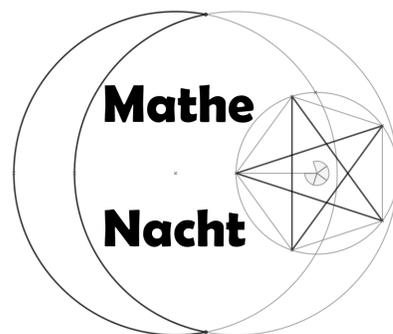
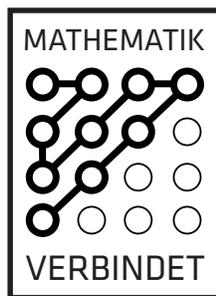
- Zeige, dass die Menge  $M := \{(1, 2, 0, 0), (0, 2, 3, 0), (0, 0, 3, 4)\}$  linear unabhängig ist über  $\mathbb{R}$ .
- Sei  $M := \{(-1, 2, 0, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 3, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ . Zeige, dass  $M$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  ist. Ist auch  $(M \setminus \{(1, 1, 0, 1)\}) \cup \{(-2, 0, 3, 1)\}$  linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ ?
- Ist die Menge  $M := \{(1, -2, 0), (1, 1, -1), (0, 1, 1)\}$  linear abhängig oder linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ ?
- Ist die Menge  $M := \{(-3, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (-2, 0, 1, -1)\}$  linear abhängig oder linear unabhängig über  $\mathbb{R}$ ?

## 4. Aufgabe:

Wahr oder Falsch? Seien  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $M \subset V$ .

- Jede  $K$ -linear unabhängige Menge von Vektoren aus  $V$  ist auch ein  $K$ -Erzeugendensystem für  $V$ .
- Es gibt ein  $K$ -Erzeugnis in  $V$ , das linear unabhängig ist über  $K$ .
- Falls  $\langle M \rangle_K = V$  ist und  $M \subset A \subset V$  gilt, dann ist auch  $\langle A \rangle_K = V$ .
- Es ist  $(1, -2, 1) \in \langle (1, -1, 0), (2, -1, -1) \rangle_{\mathbb{R}}$ .
- Es ist  $(5, 1, -2) \in \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$ .
- Es ist  $\{(2a, a, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \langle (1, -1, 0), (2, -1, -1) \rangle_{\mathbb{R}}$ .

# Erzeugnis, Basis und Dimension



## 1. Aufgabe:

Welche  $\mathbb{R}$ -Teilräume von  $\mathbb{R}^3$  erhält man bei den Erzeugnissen der linken Seite? Ordne zu!

$\langle (1, 2, 3), (-1, -1, -2) \rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a, b, 2a + 2b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$\langle (1, 1, 0), (2, 1, 1) \rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a, 2a, 3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\langle (1, 1, 4), (0, 1, 2) \rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(b + c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$
$\langle (1, 3, 1), (1, 1, -1) \rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a, b, a + b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
$\langle (1, 2, 3), (-3, -6, -9) \rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a, 2a + c, c) \mid a, c \in \mathbb{R}\}$

## 2. Aufgabe:

- Es ist  $U := \{(a, 2a, b, a - b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  ein  $\mathbb{R}$ -Teilraum von  $\mathbb{R}^4$ . Gib ein  $\mathbb{R}$ -Erzeugendensystem für  $U$  an. Ist dieses  $\mathbb{R}$ -linear unabhängig? Welche Dimension hat  $U$ ?
- Gib fünf Vektoren an, die im Erzeugnis  $\langle (2, 1, 0, 7), (3, 4, -8, 5), (3, 4, 1, -1) \rangle_{\mathbb{R}}$  liegen, ohne das Erzeugnis auszurechnen.
- Gib drei Vektoren an, die nicht im Erzeugnis aus b) liegen.

## 3. Aufgabe:

### Austauschen!

Sei  $M := \{(-3, 0, 1, 2), (0, 0, 1, 1), (0, 2, 0, -1)\}$ .  $M$  ist linear unabhängig über  $\mathbb{R}$  (wer Lust hat, kann dies nochmal beweisen).

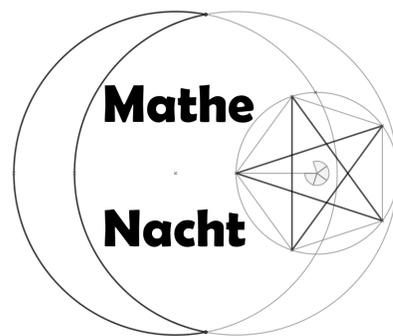
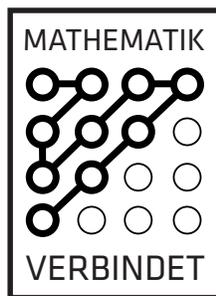
- Tausche den Vektor  $(-6, -2, 2, 5)$  so in die Menge  $M$  hinein, dass wieder eine  $\mathbb{R}$ -linear unabhängige Menge entsteht. Mit welchen Vektoren aus  $M$  darf nicht getauscht werden?
- Es sei  $B := \{(-3, 0, 1, 2), (-3, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0), (0, 2, 1, -1)\}$ . Zeige, dass  $B$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{R}^4$  ist.
- Ergänze  $M$  mit Hilfe der Basis aus b) zu einer  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{R}^4$ .

## 4. Aufgabe:

Es sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $u, w \in V$ .

- Zeige: Ist  $v \in \langle u, w \rangle_K$ , dann gilt  $\langle u, w, v \rangle_K = \langle u, w \rangle_K$ .
- Nutze a), um zu zeigen:  $\langle (1, 1, 1), (2, 3, 0), (1, 2, -1) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle (1, 1, 1), (2, 3, 0) \rangle_{\mathbb{R}}$
- Finde eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\langle (4, 1, 0, 1), (2, 0, 1, -1), (2, 1, -1, 2), (6, 2, 0, 2) \rangle_{\mathbb{R}}$  und gib die Dimension des Erzeugnisses an!

# Vektorraum- homomorphismen



## 1. Aufgabe:

- a) Bei welchen der folgenden Abbildungen  $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow V$ ,  $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  handelt es sich um Vektorraumhomomorphismen? Begründe deine Entscheidung. Dabei ist

$$V := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abbildung so, dass } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ existieren mit } f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0\}$$

- (i)  $(v_1, v_2)^{\varphi_1} = (v_1 + v_2, -v_1^2)$  ,      (ii)  $(v_1, v_2)^{\varphi_2} = v_2 \cdot (x^2 + 3x) + v_1$  ,  
(iii)  $(v_1, v_2)^{\varphi_3} = 4 \cdot (v_1 - 3v_2)$  ,      (iv)  $(v_1, v_2, v_3)^{\varphi_4} = (v_2 + 4v_3, v_1 - 3v_3)$  ,  
(v)  $(v_1, v_2)^{\varphi_5} = (4v_1 + 3v_2, v_1)$

- b) Berechne den Kern der Vektorraumhomomorphismen und gib die Dimension von Kern und Bild an.  
c) Sind die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv?

## 2. Aufgabe:

Es sei  $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  die Standardbasis des  $\mathbb{R}^4$  und  $\varphi : B \rightarrow \mathbb{R}^4$  gegeben durch

$$\begin{aligned} (e_1)^\varphi &= e_1 + e_2 & (e_3)^\varphi &= e_3 + e_4 \\ (e_2)^\varphi &= e_2 + e_3 & (e_4)^\varphi &= e_4 + e_1 \end{aligned}$$

- a) Es sei nun  $\tilde{\varphi}$  die  $\mathbb{R}$ -lineare Fortsetzung der gegebenen Abbildung. Berechne das Bild eines beliebigen Vektors  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  unter  $\tilde{\varphi}$ .  
b) Handelt es sich bei  $\text{Bild}(\varphi)$  ebenfalls um eine Basis des  $\mathbb{R}^4$ ? Ist  $\tilde{\varphi}$  demnach bijektiv?

### 3. Aufgabe:

Es sei die Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben und es gelte für alle  $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ :

$$(v_1, v_2, v_3)^\varphi = (2v_1 + v_3, 2v_1 + v_2)$$

- a) Zeige, dass  $\varphi$  linear ist über  $\mathbb{R}$ .
- b) Berechne das Bild von  $v = (0, 2, 1)$  und zeichne  $(\langle v \rangle)^\varphi$  in ein Koordinatensystem.
- c) Ist  $\varphi$  injektiv/surjektiv/bijektiv?
- d) Gib die Darstellungsmatrix der Abbildung bzgl. der folgenden geordneten Basen  $\hat{B}_1$  von  $\mathbb{R}^3$  und  $\hat{B}_2$  von  $\mathbb{R}^2$  an.

$$\hat{B}_1 = \{(1, 1, 0), (0, -1, 1), (0, 0, 1)\}$$

$$\hat{B}_2 = \{(-1, 1), (1, 0)\}$$

### 4. Aufgabe:

Es seien  $K$  ein Körper und  $U, V, W$  endlich erzeugte  $K$ -Vektorräume. Wahr oder Falsch? Begründe deine Entscheidung.

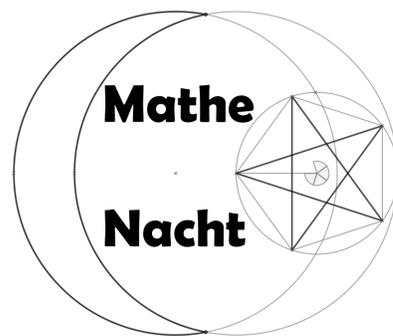
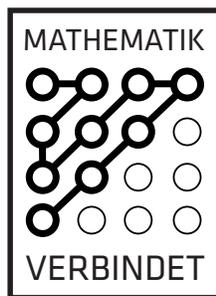
- Jede Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit

$$(1, 3)^\varphi = (0, 7) \quad \text{und} \quad (2, 6)^\varphi = (2, 8)$$

ist ein Vektorraumhomomorphismus.

- Ist  $\alpha : V \rightarrow W$  ein  $K$ -Epimorphismus, so ist  $\alpha$  immer auch ein Isomorphismus.
- Ist  $\alpha : V \rightarrow W$  ein  $K$ -Epimorphismus, so gilt  $\dim_K W \leq \dim_K V$ .
- Es seien  $\alpha : U \rightarrow V$  und  $\beta : V \rightarrow W$  mit  $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$ , dann gilt für alle  $u \in U$ :  $u^{\alpha*\beta} = 0_W$ .
- Gilt für  $\alpha : V \rightarrow V$ , dass  $\text{Kern}(\alpha) = \{0_V\}$ , so ist  $\alpha$  ein Isomorphismus.
- Ist  $\alpha : V \rightarrow W$  surjektiv mit  $\dim_K V \leq \dim_K W$ , dann ist  $\alpha$  auch bijektiv.

# Direkte Summe, Lineare Fortsetzung, Abbildungsmatrizen



## 1. Aufgabe: (Direkte Summe)

Seien  $K := \mathbb{R}$  und  $V := M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ . Sei weiter  $U_1 := \{A = (a_{ij}) \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \leq_K V$ . Zeige, dass es einen  $K$ -Teilraum  $U_2$  von  $V$  gibt so, dass  $U_1 \oplus U_2 = V$  ist!

## 2. Aufgabe: (Direkte Summe)

Seien  $K := \mathbb{R}$  und sei  $V := \mathbb{R}^5$ . Seien weiter  $U_1 := \{(a, 0, c, 0, e) \in V \mid a - c - e = 0\}$  und  $U_2 := \{(3, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 0, -3), (-4, 0, 0, 0, -2)\}_K$ .

- Berechne  $\dim_K(U_1 + U_2)$ !
- Ist  $U_1 + U_2$  eine direkte Summe? Beweise!

Sei nun  $U_3 := \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, -3, 0, 0, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)\}_K$ .

- Zeige, dass  $V = U_1 \oplus U_3$  ist!
- Finde eine Basis  $B$  von  $U_1$  und eine Basis  $C$  von  $U_3$  so, dass  $B \cup C$  eine Basis von  $V$  ist!

## 3. Aufgabe: (lineare Fortsetzung)

Seien  $K := \mathbb{R}, V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$  und sei  $B := \{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 3)\}$  eine Basis von  $V$ . Sei die Abbildung  $\beta \in \text{Hom}_K(V, W)$  gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von  $B$  wie folgt:

$$\begin{aligned}(2, 1, 0)^\beta &:= (1, 0) \\ (0, 0, 1)^\beta &:= (0, 3) \\ (-1, 0, 3)^\beta &:= (-1, 9).\end{aligned}$$

- Beschreibe, wie ein beliebiger Vektor  $v \in V$  unter  $\beta$  abgebildet wird!
- Berechne die Bilder von  $(1, 1, 0), (3, 0, 1)$  und  $(4, 7, -3)$  unter  $\beta$ !

**4. Aufgabe:** (*Abbildungsmatrix*)

Sei  $K := \mathbb{R}$  und seien  $V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$ . Sei  $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)$  definiert wie folgt: für alle  $(a, b, c) \in V$  sei  $(a, b, c)^\varphi := (a + c, 2(a + b))$ .

- Schreibe  $\text{Bild}(\varphi)$  als Erzeugnis!
- Stelle  $\varphi$  als Abbildungsmatrix  $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$  bezüglich geeigneter geordneter Basen dar!
- Erkläre an einem selbstgewählten Beispiel, wie man aus  $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$  die Bilder von konkreten Vektoren berechnen kann!

**5. Aufgabe:** (*Abbildungsmatrix*)

Matrix-Sudoku! Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Interpretiere  $A$  als Abbildungsmatrix bezüglich der geordneten Standardbasis und ergänze so, dass ...

- die Dimension des Bildes gleich 2 ist!
- im Kern nur der Nullvektor liegt!

**6. Aufgabe:** (*Abbildungsmatrix*)

Matrix-Sudoku die Zweite! Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Interpretiere  $A$  als Abbildungsmatrix bezüglich der geordneten Standardbasis für  $\mathbb{R}^3$ . Ist es möglich die Matrix so zu vervollständigen, dass der Vektor  $(1, 1, 1)$  das Bild  $(-1, -1, -1)$  hat und der Vektor  $(-1, 0, -1)$  das Bild  $(1, 0, 2)$ ?

**7. Aufgabe:** (*Abbildungsmatrix, lineare Fortsetzung*)

Seien  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit  $\dim_K(V) = 4$ . Seien weiter  $\lambda, \delta \in K$  fest sowie  $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  eine  $K$ -Basis von  $V$ . Sei  $\alpha : B \rightarrow V$  gegeben wie folgt: für alle  $v \in B$  sei  $v^\alpha := \lambda \cdot v + \delta \cdot b_1$ . Sei  $\tilde{\alpha} \in \text{Hom}_K(V, V)$  die  $K$ -lineare Fortsetzung von  $\alpha$ .

- Stelle  $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B})$  auf!
- Ermittle aus  $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B})$  die Dimension des Bildes und des Kerns von  $\tilde{\alpha}$ ! Ist  $\tilde{\alpha}$  bijektiv?