Vektorräume, Teilräume und Lineare (Un-)abhängigkeit

1. Aufgabe:

Sei $M := \{(1,1,4), (-2,0,3), (5,1,-2)\}$. Welche der folgenden Vektoren sind als $\mathbb{R}-$Linearkombinationen in M darstellbar, welche nicht? Falls ja, geht es dann auf unterschiedliche Weisen? Falls nein, was müsste konkret verändert werden?

$(2,0,-3), (-1,1,7), (3,1,-1), (-5,-3,-9)$

2. Aufgabe:

Welche der folgenden Mengen sind $\mathbb{R}$-Teilräume von $\mathbb{R}^4$, welche nicht? Verwende mindestens einmal das Teilraumkriterium.

a) $\{(a,0,b,0) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(x,0,0,y) \mid x,y \in \mathbb{R}, x+y=0\}$

c) $\{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \mathbb{R}, a \cdot b \cdot c \cdot d = 1\}$

d) $\{(0,1,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

3. Aufgabe:

a) Zeige, dass die Menge $M := \{(1,2,0,0), (0,2,3,0), (0,0,3,4)\}$ linear unabhängig ist über $\mathbb{R}$.

b) Sei $M := \{(-1,2,0,0), (1,1,0,1), (1,0,3,3)\} \subset \mathbb{R}^4$. Zeige, dass M linear unabhängig über $\mathbb{R}$ ist. Ist auch $(M \setminus \{(1,1,0,1)\} \cup \{(-2,0,3,1)\}$ linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

c) Ist die Menge $M := \{(1,-2,0), (1,1,-1), (0,1,1)\}$ linear abhängig oder linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

d) Ist die Menge $M := \{(-3,0,1,0), (-1,0,0,1), (-2,0,1,-1)\}$ linear abhängig oder linear unabhängig über $\mathbb{R}$?

4. Aufgabe:

Wahr oder Falsch? Seien K ein Körper, V ein $K-$Vektorraum und $M \subset V$.

a) Jede $K-$linear unabhängige Menge von Vektoren aus V ist auch ein K-Erzeugendensystem für V.

b) Es gibt ein K-Erzeugnis in V, das linear unabhängig ist über K.

c) Falls $\langle M \rangle_K = V$ ist und $M \subset A \subset V$ gilt, dann ist auch $\langle A \rangle_K = V$.

d) Es ist $(1,-2,1) \in \langle (1,-1,0), (2,-1,-1) \rangle_{\mathbb{R}}$.

e) Es ist $(5,1,-2) \in \langle (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) \rangle_{\mathbb{R}}$.

f) Es ist $\{(2a,a,a) \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \langle (1,-1,0), (2,-1,-1) \rangle_{\mathbb{R}}$.

Erzeugnis, Basis und Dimension

1. Aufgabe:

Welche $\mathbb{R}$-Teilräume von $\mathbb{R}^3$ erhält man bei den Erzeugnissen der linken Seite? Ordne zu!

$\langle(1,2,3),(-1,-1,-2)\rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a,b,2a+2b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
$\langle(1,1,0),(2,1,1)\rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a,2a,3a) \mid a \in \mathbb{R}\}$
$\langle(1,1,4),(0,1,2)\rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(b+c,b,c) \mid b,c \in \mathbb{R}\}$
$\langle(1,3,1),(1,1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
$\langle(1,2,3),(-3,-6,-9)\rangle_{\mathbb{R}}$	$\{(a,2a+c,c) \mid a,c \in \mathbb{R}\}$

2. Aufgabe:

a) Es ist $U := \{(a,2a,b,a-b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^4$. Gib ein $\mathbb{R}-$ Erzeugendensystem für U an. Ist dieses $\mathbb{R}$-linear unabhängig? Welche Dimension hat U?

b) Gib fünf Vektoren an, die im Erzeugnis $\langle(2,1,0,7),(3,4,-8,5),(3,4,1,-1)\rangle_{\mathbb{R}}$ liegen, ohne das Erzeugnis auszurechnen.

c) Gib drei Vektoren an, die nicht im Erzeugnis aus b) liegen.

3. Aufgabe:

Austauschen!

Sei $M := \{(-3,0,1,2),(0,0,1,1),(0,2,0,-1)\}$. M ist linear unabhängig über $\mathbb{R}$ (wer Lust hat, kann dies nochmal beweisen).

a) Tausche den Vektor $(-6,-2,2,5)$ so in die Menge M hinein, dass wieder eine $\mathbb{R}$-linear unabhängige Menge entsteht. Mit welchen Vektoren aus M darf nicht getauscht werden?

b) Es sei $B := \{(-3,0,1,2),(-3,0,0,1),(0,0,1,0),(0,2,1,-1)\}$. Zeige, dass B eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

c) Ergänze M mit Hilfe der Basis aus b) zu einer $\mathbb{R}-$Basis von $\mathbb{R}^4$.

4. Aufgabe:

Es sei V ein K-Vektorraum und $u,w \in V$.

a) Zeige: Ist $v \in \langle u,w\rangle_K$, dann gilt $\langle u,w,v\rangle_K = \langle u,w\rangle_K$.

b) Nutze a), um zu zeigen: $\langle(1,1,1),(2,3,0),(1,2,-1)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle(1,1,1),(2,3,0)\rangle_{\mathbb{R}}$

c) Finde eine $\mathbb{R}$-Basis von $\langle(4,1,0,1),(2,0,1,-1),(2,1,-1,2),(6,2,0,2)\rangle_{\mathbb{R}}$ und gib die Dimension des Erzeugnisses an!

Vektorraum-homomorphismen

1. Aufgabe:

a) Bei welchen der folgenden Abbildungen $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi_2 : \mathbb{R}^2 \to V$, $\varphi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $\varphi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ handelt es sich um Vektorraumhomomorphismen? Begründe deine Entscheidung. Dabei ist

$$V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist eine Abbildung so, dass } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \text{ existieren mit : } f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0\}$$

(i) $(v_1,\ v_2)^{\varphi_1} = \left(v_1 + v_2,\ -v_1^2\right)$, (ii) $(v_1,\ v_2)^{\varphi_2} = v_2 \cdot (x^2 + 3x) + v_1$,

(iii) $(v_1,\ v_2)^{\varphi_3} = 4 \cdot (v_1 - 3v_2)$, (iv) $(v_1,\ v_2,\ v_3)^{\varphi_4} = (v_2 + 4v_3,\ v_1 - 3v_3)$,

(v) $(v_1,\ v_2)^{\varphi_5} = (4v_1 + 3v_2,\ v_1)$

b) Berechne den Kern der Vektorraumhomomorphismen und gib die Dimension von Kern und Bild an.

c) Sind die Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv?

2. Aufgabe:

Es sei $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und $\varphi : B \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$(e_1)^\varphi = e_1 + e_2 \qquad (e_3)^\varphi = e_3 + e_4$$
$$(e_2)^\varphi = e_2 + e_3 \qquad (e_4)^\varphi = e_4 + e_1$$

a) Es sei nun $\tilde{\varphi}$ die $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung der gegebenen Abbildung. Berechne das Bild eines beliebigen Vektors $(a,\ b,\ c,\ d) \in \mathbb{R}^4$ unter $\tilde{\varphi}$.

b) Handelt es sich bei Bild(φ) ebenfalls um eine Basis des $\mathbb{R}^4$? Ist $\tilde{\varphi}$ demnach bijektiv?

3. Aufgabe:

Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben und es gelte für alle $(v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$(v_1,\ v_2,\ v_3)^\varphi = (2v_1 + v_3,\ 2v_1 + v_2)$$

a) Zeige, dass φ linear ist über $\mathbb{R}$.

b) Berechne das Bild von $v = (0,\ 2,\ 1)$ und zeichne $(\langle v \rangle)^\varphi$ in ein Koordinatensystem.

c) Ist φ injektiv/surjektiv/bijektiv?

d) Gib die Darstellungsmatrix der Abbildung bzgl. der folgenden geordneten Basen $\hat{B}_1$ von $\mathbb{R}^3$ und $\hat{B}_2$ von $\mathbb{R}^2$ an.

$$\hat{B}_1 = \{(1,\ 1,\ 0)\,,\ (0,\ -1,\ 1)\,,\ (0,\ 0,\ 1)\}$$
$$\hat{B}_2 = \{(-1,\ 1)\,,\ (1,\ 0)\}$$

4. Aufgabe:

Es seien K ein Körper und U, V, W endlich erzeugte K-Vektorräume. Wahr oder Falsch? Begründe deine Entscheidung.

☐ Jede Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$(1,\ 3)^\varphi = (0,\ 7) \quad \text{und} \quad (2,\ 6)^\varphi = (2,\ 8)$$

ist ein Vektorraumhomomorphismus.

☐ Ist $\alpha : V \to W$ ein K-Epimorphismus, so ist α immer auch ein Isomorphismus.

☐ Ist $\alpha : V \to W$ ein K-Epimorphismus, so gilt $\dim_K W \leq \dim_K V$.

☐ Es seien $\alpha : U \to V$ und $\beta : V \to W$ mit $\text{Bild}(\alpha) \subseteq \text{Kern}(\beta)$, dann gilt für alle $u \in U$: $u^{\alpha * \beta} = 0_W$.

☐ Gilt für $\alpha : V \to V$, dass $\text{Kern}(\alpha) = \{0_V\}$, so ist α ein Isomorphismus.

☐ Ist $\alpha : V \to W$ surjektiv mit $\dim_K V \leq \dim_K W$, dann ist α auch bijektiv.

Direkte Summe, Lineare Fortsetzung, Abbildungsmatrizen

1. Aufgabe: (*Direkte Summe*)

Seien $K := \mathbb{R}$ und $V := M_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Sei weiter $U_1 := \{A = (a_{ij}) \in M_{3\times 2}(\mathbb{R}) \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i > j\} \leq_K V$. Zeige, dass es einen K-Teilraum U_2 von V gibt so, dass $U_1 \oplus U_2 = V$ ist!

2. Aufgabe: (*Direkte Summe*)

Seien $K := \mathbb{R}$ und sei $V := \mathbb{R}^5$. Seien weiter $U_1 := \{(a, 0, c, 0, e) \in V \mid a - c - e = 0\}$ und $U_2 := \langle\{(3, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 2, 0, -3), (-4, 0, 0, 0, -2)\}\rangle_K$.

a) Berechne $\dim_K(U_1 + U_2)$!

b) Ist $U_1 + U_2$ eine direkte Summe? Beweise!

Sei nun $U_3 := \langle\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, -3, 0, 0, 0), (0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0)\}\rangle_K$.

c) Zeige, dass $V = U_1 \oplus U_3$ ist!

d) Finde eine Basis B von U_1 und eine Basis C von U_3 so, dass $B \cup C$ eine Basis von V ist!

3. Aufgabe: (*lineare Fortsetzung*)

Seien $K := \mathbb{R}, V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$ und sei $B := \{(2, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 0, 3)\}$ eine Basis von V. Sei die Abbildung $\beta \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ gegeben durch die Bilder der Basisvektoren von B wie folgt:

$$(2, 1, 0)^\beta := (1, 0)$$
$$(0, 0, 1)^\beta := (0, 3)$$
$$(-1, 0, 3)^\beta := (-1, 9).$$

a) Beschreibe, wie ein beliebiger Vektor $v \in V$ unter β abgebildet wird!

b) Berechne die Bilder von $(1, 1, 0), (3, 0, 1)$ und $(4, 7, -3)$ unter β!

4. Aufgabe: (*Abbildungsmatrix*)

Sei $K := \mathbb{R}$ und seien $V := \mathbb{R}^3, W := \mathbb{R}^2$. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ definiert wie folgt: für alle $(a, b, c) \in V$ sei $(a, b, c)^\varphi := (a + c, 2(a + b))$.

a) Schreibe Bild(φ) als Erzeugnis!

b) Stelle φ als Abbildungsmatrix $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$ bezüglich geeigneter geordneter Basen dar!

c) Erkläre an einem selbstgewählten Beispiel, wie man aus $M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$ die Bilder von konkreten Vektoren berechnen kann!

5. Aufgabe: (*Abbildungsmatrix*)

Matrix-Sudoku! Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & 2 \\ 0 & -3 & \end{pmatrix}$$

Interpretiere A als Abbildungsmatrix bezüglich der geordneten Standardbasis und ergänze so, dass ...

a) die Dimension des Bildes gleich 2 ist!

b) im Kern nur der Nullvektor liegt!

6. Aufgabe: (*Abbildungsmatrix*)

Matrix-Sudoku die Zweite! Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$$

Interpretiere A als Abbildungsmatrix bezüglich der geordneten Standardbasis für $\mathbb{R}^3$. Ist es möglich die Matrix so zu vervollständigen, dass der Vektor $(1, 1, 1)$ das Bild $(-1, -1, -1)$ hat und der Vektor $(-1, 0, -1)$ das Bild $(1, 0, 2)$?

7. Aufgabe: (*Abbildungsmatrix, lineare Fortsetzung*)

Seien V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 4$. Seien weiter $\lambda, \delta \in K$ fest sowie $B := \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine K-Basis von V. Sei $\alpha : B \mapsto V$ gegeben wie folgt: für alle $v \in B$ sei $v^\alpha := \lambda \cdot v + \delta \cdot b_1$. Sei $\tilde{\alpha} \in Hom_K(V, V)$ die K-lineare Fortsetzung von α.

a) Stelle $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B})$ auf!

b) Ermittle aus $M(\tilde{\alpha}, \hat{B}, \hat{B})$ die Dimension des Bildes und des Kerns von $\tilde{\alpha}$! Ist $\tilde{\alpha}$ bijektiv?